Leitungstheorie

Version:	0.0.1
Datum:	15.10.2011
Autor:	Werner Dichler

Inhalt

Grundlagen

Da sich ein elektronisches Signal nicht mit unendlicher Geschwindigkeit ausbreitet, sondern nur mit maximal $3 \cdot 10^8$ m/s (Lichtgeschwindigkeit c), spielt die Leitungstheorie ab einer Leitungslänge von annähernd der Wellenlänge $\lambda = c / f$ eine große Rolle.

Signal-Frequenz	Wellenlänge
1 MHz	300 m
10 MHz	30 m
100 MHz	3 m

Ersatzschaltbild

Jedes Teilstück einer langen Leitung kann als Vierpol betrachtet werden. Je nach Abmessungen der Leitung und verwendetem Material ergibt sich ein anderer Wert für den Leitungswiderstandsbelag (r), den Isolationsleitwertbelag (g), den Induktivitätsbelag (l) und den Kapazitätsbelag (c).

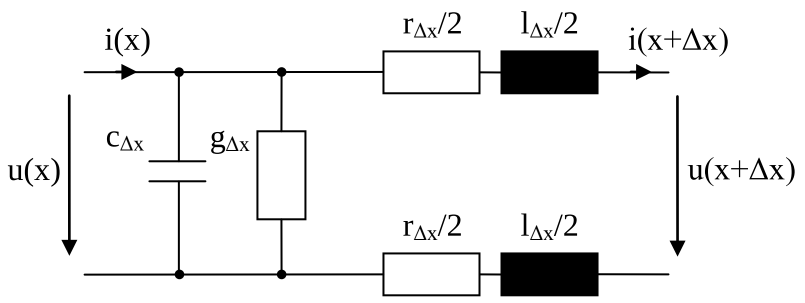

Bild 1 – Leitungs-ESB

$$\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x} = -\mathrm{r}\cdot \mathrm{i}(\mathrm{x}+\Delta\mathrm{x},\mathrm{t}) - l\cdot\frac{d}{dt}i(x+\Delta x,t)$$

$$\frac{i(x+\Delta x,t)-i(x,t)}{\Delta x} = -g\cdot u(x,t) - c\cdot\frac{d}{dt}u(x,t)$$

$\Delta x \to 0$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = -\mathrm{r}\cdot\mathrm{i}(\mathrm{x},\mathrm{t}) - l\cdot\frac{d}{dt}i(x,t)$$

$$\frac{d}{dx}i(x,t) = -g\cdot u(x,t) - c\cdot\frac{d}{dt}u(x,t)$$

Laplace-Transformation:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{s}) = -\mathrm{r}\cdot\mathrm{I}(\mathrm{x},\mathrm{s}) - l\cdot\big(s\cdot I(x,s) - i(x,0)\big)$$

$$\frac{d}{dx}I(x,s) = -g\cdot U(x,s) - c\cdot(s\cdot U(x,s) - u(x,0))$$

Formel 1 – Differentialgleichung

Kenngrößen

Die Kenngrößen der Leitung lassen sich aus den Differentialgleichungen (Formel 1) ermitteln.

$$Z_0(\mathrm{s}) = \sqrt{\frac{\mathrm{r} + \mathrm{s} \cdot \mathrm{l}}{\mathrm{g} + \mathrm{s} \cdot \mathrm{c}}}$$

$$Z_0(\mathrm{jw}) = \sqrt{\frac{\mathrm{r} + \mathrm{jw} \cdot \mathrm{l}}{\mathrm{g} + \mathrm{jw} \cdot \mathrm{c}}}$$

Formel 2 – Wellenwiderstand

$$\gamma(\mathrm{s}) = \sqrt{(\mathrm{r} + \mathrm{s} \cdot \mathrm{l})(\mathrm{g} + \mathrm{s} \cdot \mathrm{c})}$$

$$\gamma(\mathrm{jw}) = \sqrt{(\mathrm{r} + \mathrm{jw} \cdot \mathrm{l})(\mathrm{g} + \mathrm{jw} \cdot \mathrm{c})}$$

Formel 3 – Dämpfungskonstante

Transformationseigenschaft

Je nach Länge der Leitung (x), Leitungsimpedanz (Z_0), Abschlussimpedanz (Z_L) und Frequenz (w) des Signals wird am Anfang eine andere Impedanz gesehen. Mit Formel 4 kann diese Impedanz berechnet werden.
Ist der Abschlusswiderstand gleich dem Wellenwiderstand der Leitung, so sieht die Signalquelle einen Widerstand gleich dem Wellenwiderstand.

$$\frac{U(0, jw)}{I(0, jw)} = \frac{Z_L(jw) \cdot \cosh(\gamma(jw) \cdot x) + Z_0(jw) \cdot \sinh(\gamma(jw) \cdot x)}{Z_0(jw) \cdot \cosh(\gamma(jw) \cdot x) + Z_L(jw) \cdot \sinh(\gamma(jw) \cdot x)} Z_0(jw)$$

Formel 4 – Impedanz am Punkt 0

Impulsverhalten

Reflektionskonstante

Bei jeder Unstetigkeitsstelle kommt es zu Reflexionen. Diese Reflexionen können bei einem falschen Abschluss-Widerstand auftreten, sowie auch bei unangepassten Signalgenerator-Ausgängen.
Die Reflektionskonstante berechnet sich aus der Amplitude der reflektierten Welle durch der Amplitude der eingehenden Welle (Formel 5).

$$\Gamma = \frac{U_{reflektiert}}{U_{eingehend}} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

Formel 5 – Reflektionskonstante

$$Z = \frac{Z_L}{Z_0}$$

$$\Gamma = \frac{Z - 1}{Z + 1}$$

Formel 6 – Reflektionskonstante (Widerstand auf Wellenwiderstand normiert)

Abschlusswiderstand	Reflektionskonstante
0 (Kurzschluss)	-1
∞ (offene Leitung)	1
Z_0	0

System mit Signalquelle und Last

Für einen Aufbau nach Bild 2 gibt es zwei Reflektionsmöglichkeiten. Für jeden Übergang kann eine Reflektionskonstante berechnet werden.

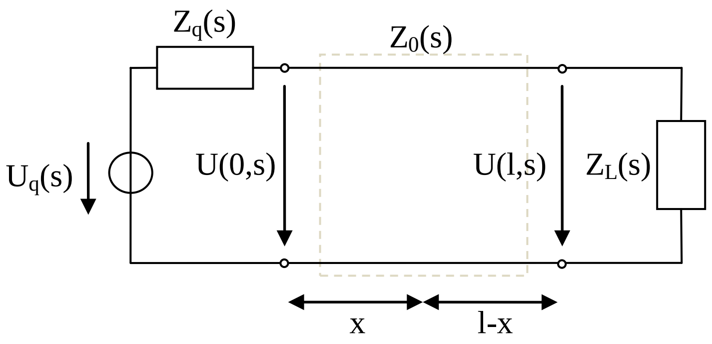

Bild 2 – Impulsverhalten

$$\Gamma_q = \frac{Z_q - Z_0}{Z_q + Z_0}$$

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

Formel 7 – Reflektionskonstanten am Eingang / Ausgang von der Leitung

$$U(l,s) = \frac{0{,}5\left(1 - \Gamma_q\right)(1 + \Gamma_L)}{1 - \Gamma_q \cdot \Gamma_L \cdot e^{-2\gamma l}} \cdot e^{-\gamma l} \cdot U_q(s)$$

für $Z_q = Z_L = Z_0$:

$$U(l,s) = 0{,}5 \cdot e^{-\gamma l} \cdot U_q(s)$$

(Dämpfung u. Phasendrehung)

Formel 8 – Spannung am Ausgang der Leitung

$$U(x,s) = \frac{0{,}5\left(1-\Gamma_q\right)\left(1+\Gamma_L \cdot e^{-2\gamma(l-x)}\right)}{1-\Gamma_q \cdot \Gamma_L \cdot e^{-2\gamma l}} \cdot e^{-\gamma x} \cdot U_q(s)$$

$\frac{1}{1-\Gamma_q \cdot \Gamma_L \cdot e^{-2\gamma l}} = \sum_{n=0}^{\infty} (\Gamma_q \cdot \Gamma_L)^n \cdot e^{-2n\gamma l}$:

$$U(x,s) = 0{,}5 \cdot (l-\Gamma_q) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[(\Gamma_q \cdot \Gamma_L)^n \cdot e^{-\gamma(x+2nl)} + \Gamma_L (\Gamma_q \cdot \Gamma_L)^n \cdot e^{-\gamma(2l-x+2nl)}\right] \cdot U_q(s)$$

$$U(x,s) = U_q(s) \cdot \frac{Z_0(s)}{Z_L(s)+Z_0(s)} + \begin{bmatrix} e^{-\gamma x} + \Gamma_L \cdot e^{-\gamma(l+l-x)} + \\ \Gamma_L \cdot \Gamma_q \cdot e^{-\gamma(2l+x)} + \Gamma_L \cdot \Gamma_q \cdot \Gamma_L \cdot e^{-\gamma(3l+l-x)} + \\ \Gamma_L \cdot \Gamma_q \cdot \Gamma_L \cdot \Gamma_q \cdot e^{-\gamma(4l+x)} + \Gamma_L \cdot \Gamma_q \cdot \Gamma_L \cdot \Gamma_q \cdot \Gamma_L \cdot e^{-\gamma(5l+l-x)} + \cdots \end{bmatrix}$$

Formel 9 – Spannung in der Mitte der Leitung (Punkt x)

Praxis

Um die Folgen eines falschen Abschlusswiderstandes zu analysieren, wurde ein 50 Meter Koaxialkabel (50Ω Wellenwiderstand) mit einem Signalgenerator (50Ω Ausgangswiderstand) verbunden. Als Testsignal wurde ein Rechteckimpuls verwendet (f=1MHz, t_{ON}=200ns). Gemessen wurde das Signal am Leitungsanfang und am Leitungsende.

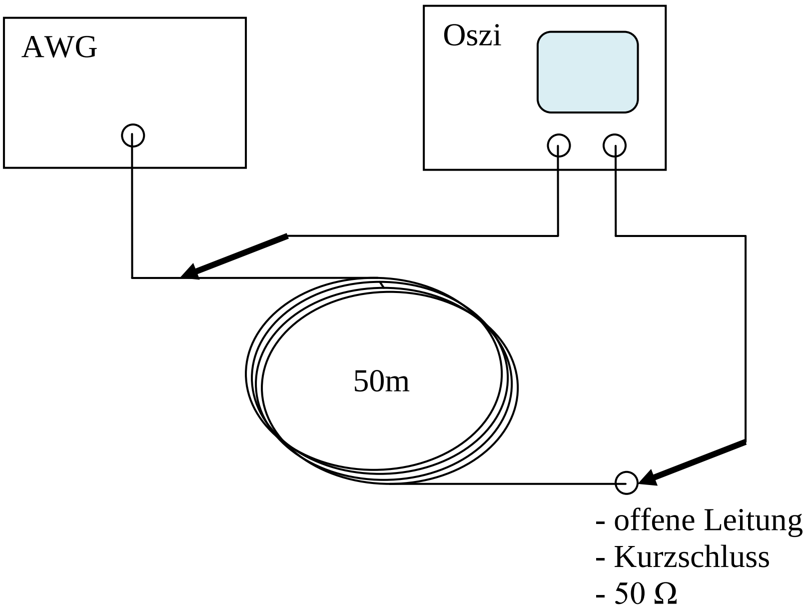

Bild 3 – Skizze des Messaufbaus

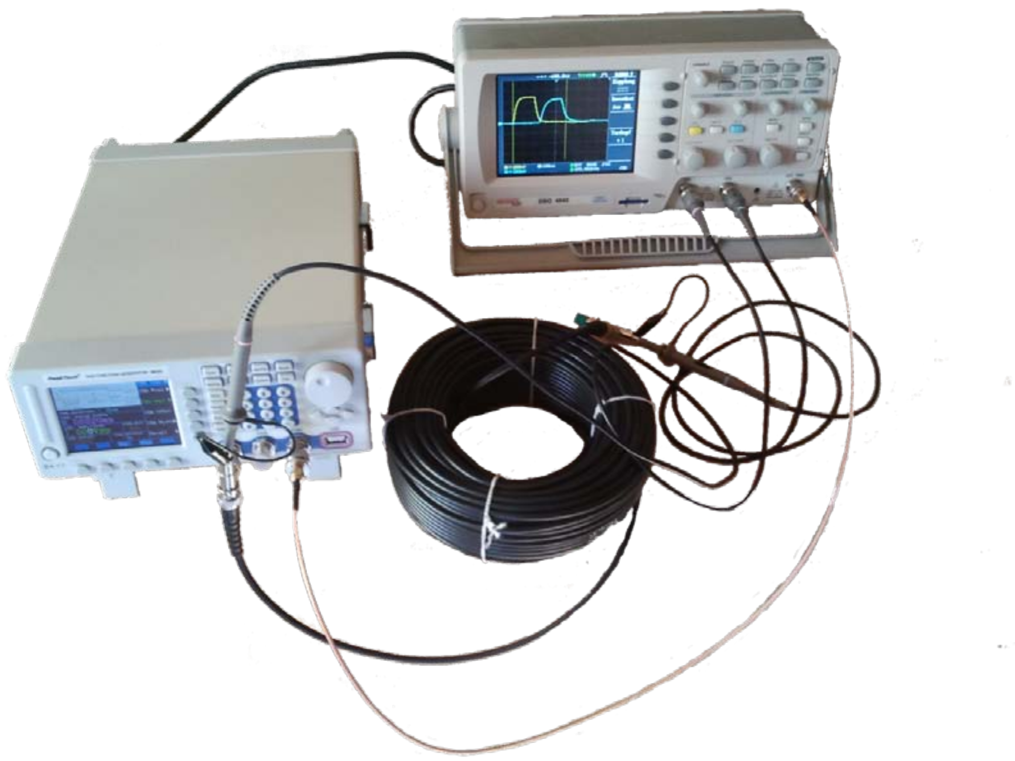

Bild 4 – Messaufbau

Messergebnisse

Der Tastkopf von Kanal 1 (gelb) wurde am Anfang des Kabels angeschlossen, der Tastkopf von Kanal 2 (blau) am Ende.

In Bild 5 wurde die Leitung mit einem 50Ω Widerstand abgeschlossen. Somit treten beinahe keine Reflektionen auf. Mit dem Cursor wurde die Breite des Rechteckimpulses gemessen (200ns). Das Signal benötigt 250ns um vom Anfang des Kabels zum Ende zu gelangen.

In Bild 6 wurde die Leitung am Ende offen gelassen. Somit ist die Reflektionskonstante gleich 1 und das Signal wird zurück reflektiert. Das Signal benötigt hin und retour 500ms.

In Bild 7 wurde die Leitung am Ende kurzgeschlossen. Somit beträgt die Spannung am Ausgang gleich 0. Das Signal wird invertiert reflektiert (Reflektionskonstante = -1).

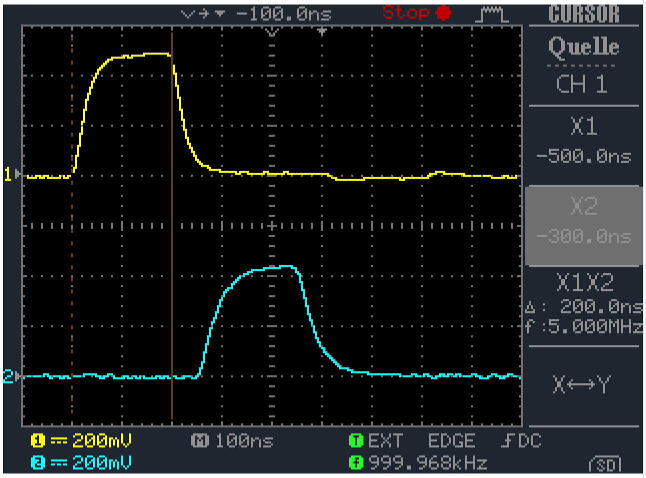

Bild 5 – 50Ω Abschluss

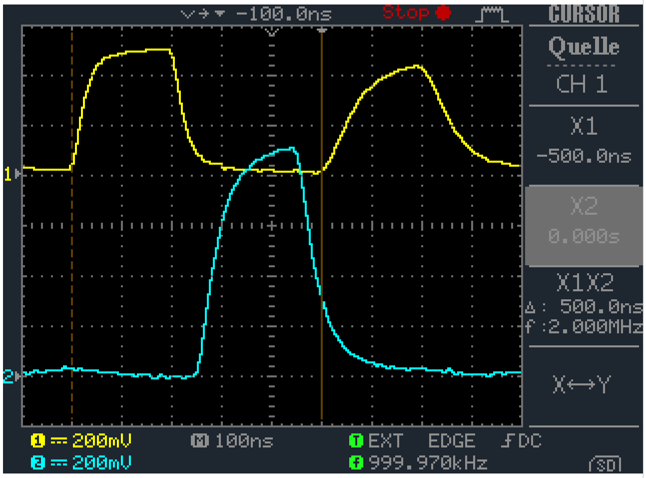

Bild 6 – offene Leitung

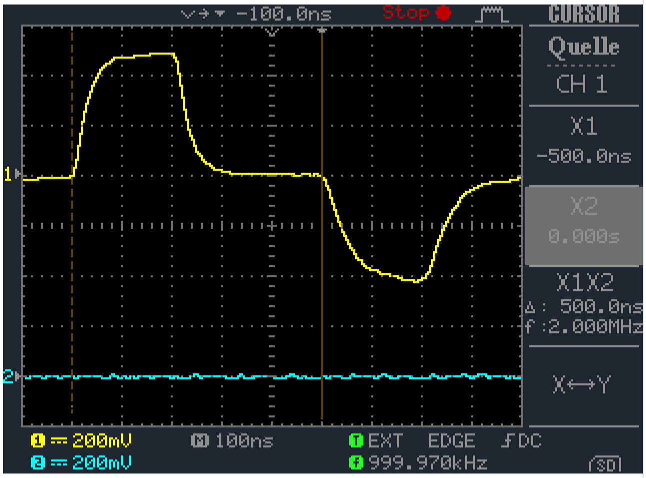

Bild 7 – Kurzschluss

Erkenntnisse

Die Geschwindigkeit des Signals innerhalb der Leitung ist von der Beschaffenheit der Leitung abhängig und wird mit dem VF-Wert angegeben (Velocity Factor). Für das verwendete RG58C/U Kabel beträgt dieser Faktor 0,66. Somit breitet sich das Signal mit $0{,}66 \cdot 3 \cdot 10^8$ m/s aus.

$$v = \frac{100m}{500ns} = 2 \cdot 10^8 m/s$$

$$VF = \frac{v}{c} = \frac{2 \cdot 10^8 m/s}{3 \cdot 10^8 m/s} = 0{,}6\dot{6}$$

Formel 10 – Geschwindigkeit des gemessenen Signals

Mit der Impulsmessung kann der korrekte Abschluss einer Leitung gemessen werden. Falls innerhalb einer Leitung ein Bruch oder ein Kurzschluss aufgetreten ist kann man des weiteren auch die Entfernung bis zum Fehler berechnen, da die Reflektionslaufzeit gemessen werden kann.